SECTION A

Partiel du 12 novembre 2011

Durée : 3 heures.

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.

Questions de cours

1. Soit $P(X)$ un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$. Quand dit-on que $r \in \mathbb{C}$ est une racine (ou un zéro) de $P(X)$? Qu'est-ce qu'une racine multiple (de multiplicité $m > 1$) ?
2. Dans $\mathbb{R}^n$, à quelle condition dit-on que les m ($m \geqslant n$) vecteurs $v_1, \ldots, v_m$ forment une famille génératrice ?
3. Qu'est-ce qu'une base de $\mathbb{R}^n$?

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\frac{1}{2}\, z^2 + 2\sqrt{2}\, z + 3 + i = 0$. On exprimera les racines sous forme algébrique (ou cartésienne, c'est-à-dire sous forme $a + ib$, avec a, b des réels).

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 - (2+i)z^2 + 1 + i = 0$. On pourra commencer par résoudre l'équation $Z^2 - (2+i)Z + 1 + i = 0$ et on exprimera les racines sous forme algébrique (ou cartésienne).

Exercice 3

1. Soient E, F deux ensembles non vides et $\varphi : E \to F$ une application.
   (a) Rappeler la définition de l'image directe $\varphi(A)$ d'un sous-ensemble $A \subset E$ par φ.
   (b) Rappeler la définition de l'image réciproque $\varphi^{-1}(B)$ d'un sous-ensemble $B \subset F$ par φ.
   (c) Montrer que pour toute partie B de F on a l'inclusion suivante :
   $$\varphi\big(\varphi^{-1}(B)\big) \subset B.$$
2. On considère l'application :
   $$f\colon [-\pi, 2\pi] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(x) + 1.$$
   (a) Etudier les variations de la fonction f sur $[-\pi, 2\pi]$, puis représenter son graphe et déterminer son image $f([-\pi, 2\pi])$.
   (b) Décrire les sous-ensembles suivants de $[-\pi, 2\pi]$:
   $$f^{-1}\big(\{2\}\big)\,, f^{-1}\big(\{0\}\big)\,,\ f^{-1}\big(\{1\}\big)\,,\ f^{-1}\big(\{-1\}\big)\,,\ f^{-1}\big(]0, +\infty[\big)\,,\ f^{-1}\big([0,1]\big)$$
   (c) Décrire les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$:
   $$f\big([0, \pi]\big)\,,\ f\big([-\pi, 0]\big)\,.$$
   (d) Donner un exemple de partie B de $\mathbb{R}$ pour laquelle : $f\big(f^{-1}(B)\big) \neq B$.

Exercice 4

1. Déterminer la forme exponentielle des racines de l'équation $z^7 = 1$, où $z \in \mathbb{C}$.
2. Effectuer la division euclidienne du polynôme $X^7 - 1$ par le polynôme $X - 1$.

3. Déduire de la question précédente que si $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ vérifie $z^7 = 1$, alors :

$$(\star) \quad 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 0.$$

4. Soit $\omega = e^{2i\pi/7}$. Notons $S = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $T = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.
   (a) Calculer la partie imaginaire de S, puis en déduire qu'elle est strictement positive.
   (b) Démontrer que : $\overline{S} = T$.
   (c) Démontrer que : $S + T = -1$.
   (d) Démontrer que : $S \cdot T = 2$.
5. Déduire de la question précédente que S et T sont les racines du trinôme

$$X^2 + X + 2,$$

   puis calculer la forme algébrique (ou cartésienne) de S et T.

Exercice 5

1. Montrer que le système d'équations linéaires homogène suivant :

$$\begin{cases} x - y + 2z = & 0 \\ \phantom{x-{}} y - 2z = & 0 \\ 2x - z = & 0\,. \end{cases}$$

   admet pour unique solution le vecteur nul $(0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^3$.
   En déduire que les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants (qui sont les "colonnes du système") :

$$(1, 0, 2),\ (-1, 1, 0),\ (2, -2, -1)$$

   sont linéairement indépendants.
2. Montrer que le système d'équations linéaires homogène suivant :

$$\begin{cases} x - y + 2z = & 0 \\ -x + 2y - 4z = & 0 \\ 2x - y + 2z = & 0\,. \end{cases}$$

   admet une infinité de solutions et déterminer une base de l'espace des solutions du système. Calculer la dimension de l'espace des solutions du système.
   Les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$(1, -1, 2),\ (-1, 2, -1),\ (2, -4, 2)$$

   sont-ils linéairement indépendants ?
3. Considérons maintenant le système d'équations linéaires avec second membre suivant :

$$\begin{cases} x - y + 2z = & a \\ -x + 2y - 4z = & b \\ 2x - y + 2z = & c\,. \end{cases}$$

   Montrer que ce système possède au moins une solution si, et seulement si,

$$c = 3a + b.$$

4. On suppose que $a = 0$, $b = c = 1$. Calculer l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x - y + 2z = & 0 \\ -x + 2y - 4z = & 1 \\ 2x - y + 2z = & 1\,. \end{cases}$$